

ESTIMACIÓN DE BLOQUES (3D) MEDIANTE KRIGEADO ORDINARIO

HEBER HERNÁNDEZ GUERRA, JULIO, 2018

FUNDAMENTOS

El Krigeado Ordinario, desde ahora KO, es un modelo matemático que data de los años 60, propuesto por el Dr. George Matheron (geo matemático Francés fundador de la geoestadística), que busca dar solución al problema de la estimación de leyes en bloques, a partir de datos que se encuentren dentro de una denominada zona de dependencia (homogeneidad).

El KO, básicamente trabaja encontrando la mejor estimación lineal posible de la ley de un bloque, considerando la información disponible tanto al interior como al exterior del bloque que se requiere estimar.

A continuación, se presenta la formula lineal del estimador $[Z^*(x)]$:

$$Z^*(x) = \sum_{i=1}^N (a_i \times \lambda_i)$$

Donde:

- a_i : Ley de la muestra conocida
- λ_i : Ponderador asociado a la muestra conocida

El estimador es insesgado y asegura minimizar la varianza de estimación. Esto último corresponde a una virtud del krigeado, dado que maximiza el provecho de la información, para obtener una estimación más precisa.

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$$

Es muy importante comentar, que el KO trabaja desconociendo el valor de la media de la variable regionalizada. Sin embargo su aplicación debe ser en dominios de carácter estacionario, conociendo momentos de segundo orden como el *semivariograma* $\gamma(h)$ o la función de *covarianza* $C(h)$.

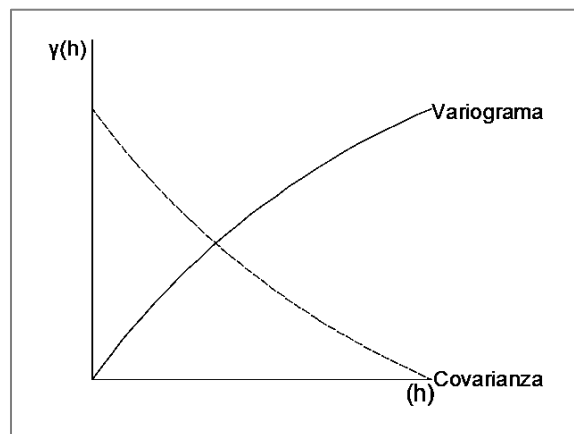


Figura N° 1: Relación semivariograma con covarianza
Fuente: Elaboración propia

La relación queda establecida según la siguiente ecuación:

$$C(h) = C(0) - \gamma(h)$$

Donde:

- **C(h):** Covarianza
- **C(0):** Covarianza en el origen ó varianza σ^2
- **$\gamma(h)$:** Semivariograma

Las ponderaciones asignadas por este estimador a las muestras conocidas, se establecen a través de un sistema de ecuaciones normalmente expresadas con los valores del semivariograma:

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j * \gamma(x_i - x_j) + \mu = \gamma(x_i, V)$$

De este sistema, se observa que son estudiadas las redundancias entre los datos conocidos y las correlaciones entre datos conocidos y puntos a estimar.

La expresión “ μ ”, corresponde al multiplicador de *Lagrange*, que es ingresado al sistema para cumplir con la condición de insesgamiento antes comentada.

La varianza de estimación del método, se obtiene a partir de la siguiente formula:

$$S^2(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_i * \gamma(V, x_i) + \mu - \gamma(V, V)$$

Donde:

- **$\gamma(V, x_i)$:** varianza de dispersión punto volumen
- **$\gamma(V, V)$:** varianza de dispersión volumen volumen
- **λ_i :** Ponderación asignada a la muestra
- **μ :** Multiplicador de Lagrange

Por lo cual las ecuaciones del krigeado por bloques expresadas con el semivariograma quedan como:

$$\begin{bmatrix} 0 & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} & 1 \\ \gamma_{21} & 0 & \dots & \gamma_{2n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{V_k,1} \\ \gamma_{V_k,2} \\ \dots \\ \gamma_{V_k,n} \\ 1 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO

Se desea estimar la ley media $[Z^*(\mathbf{x})]$ de un bloque con dimensiones 2 x 2 x 2 (m), a partir de 4 muestras (puntos) conocidos y visualizados en este documento como esferas.

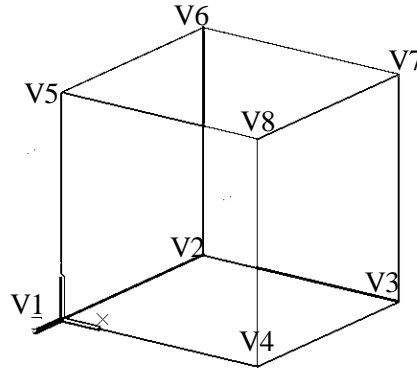


Figura N°1: Bloque 2 x 2 x 2 m
Fuente: Elaboración propia [Autocad]

Tabla N°1: Coordenadas del bloque

| Vértices del bloque | | | |
|---------------------|----------|-----------|----------|
| ID | Este (X) | Norte (Y) | Cota (Z) |
| V1 | 0 | 0 | 0 |
| V2 | 0 | 2 | 0 |
| V3 | 2 | 2 | 0 |
| V4 | 2 | 0 | 0 |
| V5 | 0 | 0 | 2 |
| V6 | 0 | 2 | 2 |
| V7 | 2 | 2 | 2 |
| V8 | 2 | 0 | 2 |

Fuente: Elaboración propia

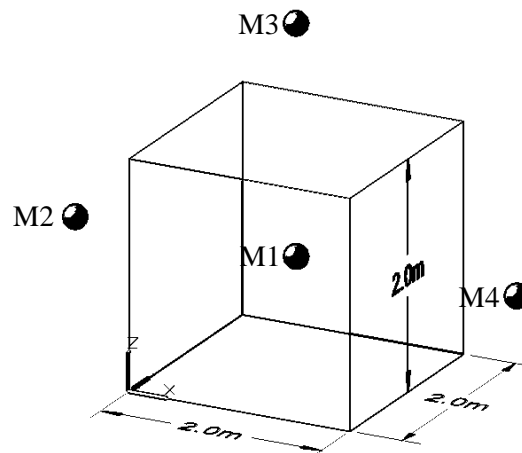


Figura N°2: Muestras conocidas
Fuente: Elaboración propia [Autocad]

Tabla N°2: Coordenadas de las muestras

| Información de las muestras | | | |
|-----------------------------|----------|-----------|----------|
| ID Muestra | Este (X) | Norte (Y) | Cota (Z) |
| M1 | 1 | 1 | 1 |
| M2 | -1 | 1 | 1 |
| M3 | 1 | 1 | 3 |
| M4 | 3 | 1 | 1 |

Fuente: Elaboración propia

El modelo estructural, en este caso es de comportamiento isótropo y se conoce como $\gamma(\mathbf{h}) = 1.2 SPH\left(\frac{h}{10}\right)$, de lo cual se deduce una **meseta de valor 1.2** y un **alcance máximo de 10 metros** (zona de influencia).

Las distancias entre muestras, las cuales son necesarias para determinar las varianzas de dispersión entre muestras $[\gamma(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)]$, quedan dispuestas según la **tabla N° 3**.

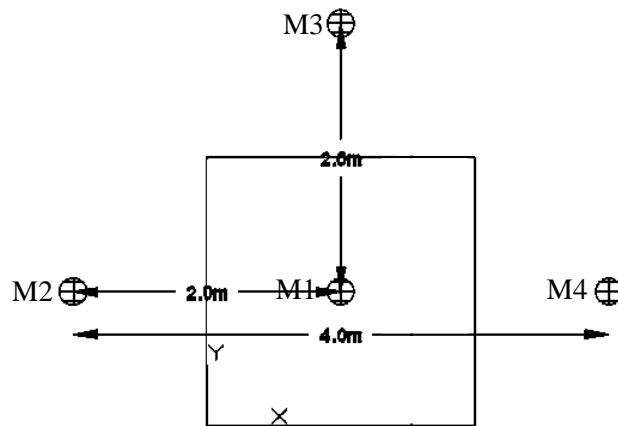


Figura N°3: Ubicación muestras plano XY

Fuente: Elaboración propia [Autocad]

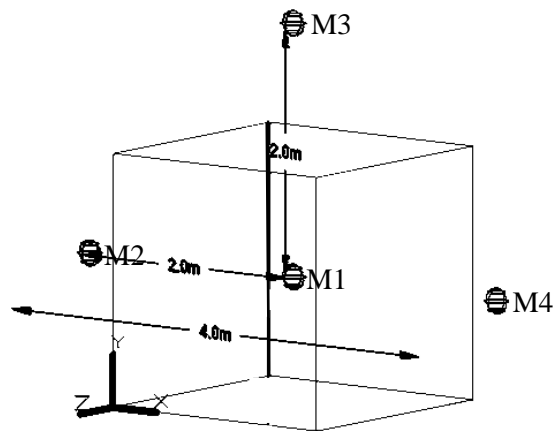


Figura N°4: Ubicación muestras Isométrico

Fuente: Elaboración propia [Autocad]

Tabla N°3: Distancias entre muestras

| Distancia (h) | M1 | M2 | M3 | M4 |
|---------------|----|------|------|------|
| M1 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| M2 | 2 | 0 | 2.83 | 4 |
| M3 | 2 | 2.83 | 0 | 2.83 |
| M4 | 2 | 4 | 2.83 | 0 |

Fuente: Elaboración propia

Luego las varianzas de dispersión entre muestras, utilizando el modelo matemático esférico, quedan representadas en la **tabla N° 4**.

$$\gamma(h) = C_0 + C^*[1.5*(h/a)] - [0.5*(h/a)^3]$$

Tabla N°4: varianzas de dispersión entre muestras

| $\gamma(h)$ | M1 | M2 | M3 | M4 |
|-------------|------|------|------|------|
| M1 | 0.00 | 0.36 | 0.36 | 0.36 |
| M2 | 0.36 | 0.00 | 0.50 | 0.68 |
| M3 | 0.36 | 0.50 | 0.00 | 0.50 |
| M4 | 0.36 | 0.68 | 0.50 | 0.00 |

Fuente: Elaboración propia

Transformando $\gamma(h)$ en $C(h)$:

Tabla N°5: covarianzas entre muestras

| $C(h)$ | M1 | M2 | M3 | M4 |
|--------|------|------|------|------|
| M1 | 1.20 | 0.84 | 0.84 | 0.84 |
| M2 | 0.84 | 1.20 | 0.70 | 0.52 |
| M3 | 0.84 | 0.70 | 1.20 | 0.70 |
| M4 | 0.84 | 0.52 | 0.70 | 1.20 |

Fuente: Elaboración propia

Para calcular las varianzas de dispersión entre las muestras y el bloque [$\gamma(V; xi)$], es que se debe discretizar el volumen en una serie de nodos (puntos).

$$\gamma(V; xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \gamma(V; xi)$$

En este caso y al tratarse de un ejemplo manual, es que se discretiza el volumen total en ocho nodos. Se procede dividiendo en ocho sub-bloques y posteriormente trazando el nodo en el centro de cada sub-bloque.

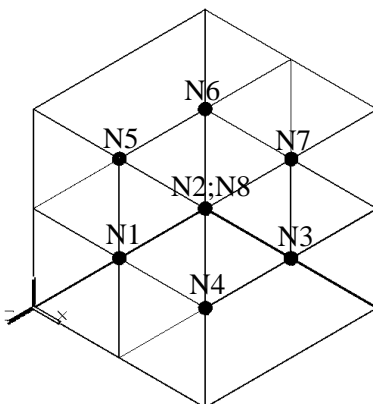


Figura N°5: Discretización del volumen en ocho nodos (vista isométrica)

Fuente: Elaboración propia [Autocad]

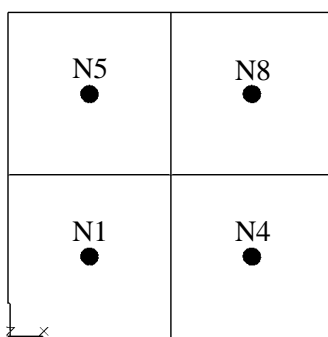


Figura N° 6: Discretización del volumen en ocho nodos (vista frontal XY)

Fuente: Elaboración propia [Autocad]

Tabla N°6: Coordenadas de los nodos

| Información de los nodos | | | |
|--------------------------|----------|-----------|----------|
| ID nodo | Este (X) | Norte (Y) | Cota (Z) |
| N1 | 0.5 | 0.5 | 0.5 |
| N2 | 0.5 | 1.5 | 0.5 |
| N3 | 1.5 | 1.5 | 0.5 |
| N4 | 1.5 | 0.5 | 0.5 |
| N5 | 0.5 | 0.5 | 1.5 |
| N6 | 0.5 | 1.5 | 1.5 |
| N7 | 1.5 | 1.5 | 1.5 |
| N8 | 1.5 | 0.5 | 1.5 |

Fuente: Elaboración propia

Conociendo las coordenadas de los nodos, se puede calcular $[\gamma(V; M1)]$, $[\gamma(V; M2)]$, $[\gamma(V; M3)]$ y $[\gamma(V; M4)]$.

Para el caso de la **muestra N° 1 (M1)**, ubicada en el privilegiado lugar del centro del bloque, la varianza de dispersión punto volumen, queda definida como:

$$\gamma(V; M1) = \gamma(M1;N1) + \gamma(M1;N2) + \gamma(M1;N3) + \gamma(M1;N4) + \gamma(M1;N5) + \gamma(M1;N6) + \gamma(M1;N7) + \gamma(M1;N8) / 8$$

$$\gamma(V; M1) = \gamma(0.866)*8/8$$

$$\gamma(V; M1) = \gamma(0.866)$$

$$\gamma(V; M1) = 0.16$$

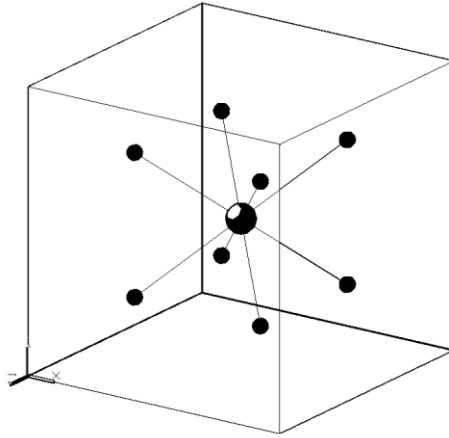


Figura N° 7: Distancia M1 a los ocho nodos (vista isométrica)
Fuente: Elaboración propia [Autocad]

Luego $[\gamma(V; M2)]$ queda definida como:

$$\gamma(V; M2) = \gamma(M2;N1) + \gamma(M2;N2) + \gamma(M2;N3) + \gamma(M2;N4) + \gamma(M2;N5) + \gamma(M2;N6) + \gamma(M2;N7) + \gamma(M2;N8) / 8$$

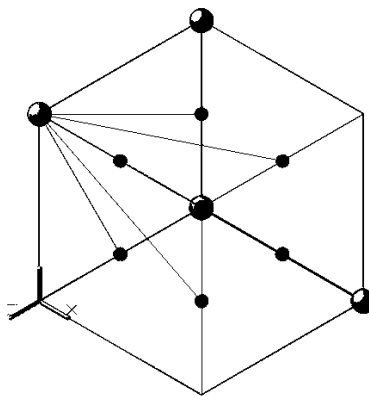


Figura N° 8: Distancia M2 a los ocho nodos (vista isométrica)
Fuente: Elaboración propia [Autocad]

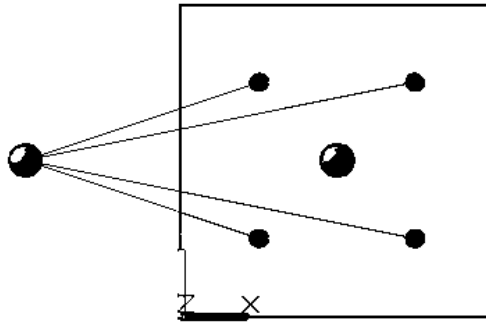


Figura N° 9: Distancia M2 a los ocho nodos (vista frontal XY)
Fuente: Elaboración propia [Autocad]

Reemplazando las distancias $[M2; Ni]$ de la formula anterior $[\gamma(V; M2)]$:

$$\gamma(V; M2) = \gamma(1.6583) + \gamma(1.6583) + \gamma(2.5981) + \gamma(2.5981) + \gamma(1.6583) + \gamma(1.6583) + \gamma(2.5981) + \gamma(2.5981)/8$$

$$\gamma(V; M2) = [\gamma(1.6583)]*4 + [\gamma(2.5981)]*4/8$$

$$\gamma(V; M2) = [(0.3*4) + (0.46*4)]/8$$

$$\gamma(V; M2) = 0.38$$

Por geometría, sabemos que $[\gamma(V; M2)] = [\gamma(V; M3)] = [\gamma(V; M4)]$, por lo que sus dispersiones punto volumen, serán también iguales.

Ordenando el sistema de ecuaciones del kriging ordinario en función al semivariograma:

$$0.00*\lambda_1 + 0.36*\lambda_2 + 0.36*\lambda_3 + 0.36*\lambda_4 + \mu = 0.16$$

$$0.36*\lambda_1 + 0.00*\lambda_2 + 0.50*\lambda_3 + 0.68*\lambda_4 + \mu = 0.38$$

$$0.36*\lambda_1 + 0.50*\lambda_2 + 0.00*\lambda_3 + 0.50*\lambda_4 + \mu = 0.38$$

$$0.36*\lambda_1 + 0.68*\lambda_2 + 0.50*\lambda_3 + 0.00*\lambda_4 + \mu = 0.38$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$$

Ordenando el sistema de ecuaciones del kriging ordinario en función a la covarianza:

$$1.20*\lambda_1 + 0.84*\lambda_2 + 0.84*\lambda_3 + 0.84*\lambda_4 + \mu = 1.04$$

$$0.84*\lambda_1 + 1.20*\lambda_2 + 0.70*\lambda_3 + 0.52*\lambda_4 + \mu = 0.82$$

$$0.84*\lambda_1 + 0.70*\lambda_2 + 1.20*\lambda_3 + 0.70*\lambda_4 + \mu = 0.82$$

$$0.84*\lambda_1 + 0.52*\lambda_2 + 0.70*\lambda_3 + 1.20*\lambda_4 + \mu = 0.82$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$$

Sea el sistema de $\gamma(h)$ o $C(h)$ que se resuelva, los ponderadores obtenidos $[\lambda_i]$ serán los mismos. Luego μ será negativo en caso de emplear covarianzas. En este caso se utiliza el semivariograma.

$$\lambda_1 = 0.59$$

$$\lambda_2 = 0.16$$

$$\lambda_3 = 0.10$$

$$\lambda_4 = 0.16$$

$$\mu = 0.01$$

Haciendo uso del estimador lineal insesgado del krigado ordinario para el bloque [V], se obtiene:

$$\mathbf{Z}^*(\mathbf{x})\mathbf{k}_o = [(0.59*\mathbf{M}_1) + (0.16*\mathbf{M}_2) + (0.10*\mathbf{M}_3) + (0.16*\mathbf{M}_4)]$$

La varianza de estimación del krigado ordinario, queda expresada como:

$$\mathbf{S}^2(\mathbf{x})\mathbf{k}_o = [(0.59*0.16) + (0.16*0.38) + (0.10*0.38) + (0.16*0.38)] + 0.01 - \gamma(\mathbf{V}, \mathbf{V})$$

Con esto, nos vemos en la necesidad de estimar la varianza de dispersión volumen volumen [$\gamma(\mathbf{V}, \mathbf{V})$] para obtener la varianza de estimación del KO.

$$\gamma(\mathbf{V}; \mathbf{V}): = \frac{1}{(n)^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma(z_i z_j)$$

Para la obtención de $\gamma[\mathbf{V}; \mathbf{V}]$, se requiere conocer la relación de varianzas de todos los nodos que discretizan el volumen.

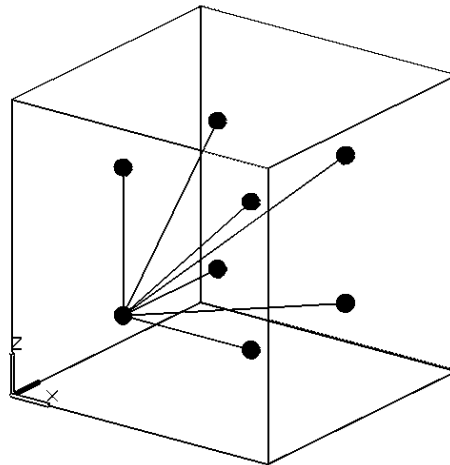


Figura N° 10: Relación Nodo 1 (N1) con demás nodos (Ni)
Fuente: Elaboración propia [Autocad]

Tabla N°7: Distancias entre nodos (matriz 8 x 8)

| h | N1 | N2 | N3 | N4 | N5 | N6 | N7 | N8 |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| N1 | 0.00 | 1.00 | 1.41 | 1.00 | 1.00 | 1.41 | 1.73 | 1.41 |
| N2 | 1.00 | 0.00 | 1.00 | 1.41 | 1.41 | 1.00 | 1.41 | 1.73 |
| N3 | 1.41 | 1.00 | 0.00 | 1.00 | 1.73 | 1.41 | 1.00 | 1.41 |
| N4 | 1.00 | 1.41 | 1.00 | 0.00 | 1.41 | 1.73 | 1.41 | 1.00 |
| N5 | 1.00 | 1.41 | 1.73 | 1.41 | 0.00 | 1.00 | 1.41 | 1.00 |
| N6 | 1.41 | 1.00 | 1.41 | 1.73 | 1.00 | 0.00 | 1.00 | 1.41 |
| N7 | 1.73 | 1.41 | 1.00 | 1.41 | 1.41 | 1.00 | 0.00 | 1.00 |
| N8 | 1.41 | 1.73 | 1.41 | 1.00 | 1.00 | 1.41 | 1.00 | 0.00 |

Fuente: Elaboración propia

Tabla N°8: varianzas entre nodos (matriz 8 x 8)

| $\gamma(h)$ | N1 | N2 | N3 | N4 | N5 | N6 | N7 | N8 |
|-------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| N1 | 0.00 | 0.18 | 0.25 | 0.18 | 0.18 | 0.25 | 0.31 | 0.25 |
| N2 | 0.18 | 0.00 | 0.18 | 0.25 | 0.25 | 0.18 | 0.25 | 0.31 |
| N3 | 0.25 | 0.18 | 0.00 | 0.18 | 0.31 | 0.25 | 0.18 | 0.25 |
| N4 | 0.18 | 0.25 | 0.18 | 0.00 | 0.25 | 0.31 | 0.25 | 0.18 |
| N5 | 0.18 | 0.25 | 0.31 | 0.25 | 0.00 | 0.18 | 0.25 | 0.18 |
| N6 | 0.25 | 0.18 | 0.25 | 0.31 | 0.18 | 0.00 | 0.18 | 0.25 |
| N7 | 0.31 | 0.25 | 0.18 | 0.25 | 0.25 | 0.18 | 0.00 | 0.18 |
| N8 | 0.25 | 0.31 | 0.25 | 0.18 | 0.18 | 0.25 | 0.18 | 0.00 |

Fuente: Elaboración propia

Luego empleando la fórmula de varianza de dispersión volumen volumen:

$$\gamma(V;V) = \frac{1}{(8)^2} [(0)8 + (0.18)24 + (0.25)24 + (0.31)8]$$

$$\gamma(V;V) = \frac{1}{64} [4.32 + 6 + 2.48]$$

$$\gamma(V;V) = 0.20$$

$$S^2(x)_{ko} = [(0.59*0.16) + (0.16*0.38) + (0.10*0.38) + (0.16*0.38)] + 0.01 - \mathbf{0.20}$$

$$S^2(x)_{ko} = 0.064$$

Finalmente se puede obtener $[Z^*(x)]$ y $[S^2(x)]$ para cualquier valor de $[Mi]$.